PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie sur IR par $f(x) = \text{Log}\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$.

A-1/a- Montrer que la fonction f est impaire.

b- Montrer que f est dérivable sur IR et vérifier que $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.

2/ Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a- Etudier les branches infinies de la courbe (C).

b-Trouver une équation cartésienne de la tangente Δ à (C) en O.

c- Préciser la position de Δ par rapport à (C).

d- Tracer la droite Δ et la courbe (C) .

3/ Soit a un réel strictement positif; calculer en fonction de a, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = a$.

B-1/a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un domaine I que l'on précisera.

b- Construire dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe (C') de g.

c- Montrer que pour tout $x \in I$ on a $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.

2/a- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet, dans IR_+^*, une seule solution α et que $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b- Calculer, en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par les deux courbes (C) et (C') et situé dans le demi-plan $x \geq 0$.

C- On considère la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

1/a- Montrer que φ est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b- On pose $h=\varphi^{-1}$. Donner les expressions de h(x) et $h'(x); \forall x \in J$

2/ On pose, pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in IN^*$

$$S_n(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

a- Montrer que $S_n(x) = h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$.

b- En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).3^{2n-1}}$.